求导逆运算构造函数

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[xf(x)]' = f(x) + xf'(x) > 0 \Rightarrow xf(x)\uparrow$$

$$xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}\uparrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0.$$

$$[x^n\cdot f(x)]' = nx^{n-1}f(x) + x^n\cdot f'(x) = x^{n-1}[x\cdot f'(x) + nf(x)]$$

$$xf'(x) + nf(x) > 0 \Rightarrow x^nf(x)\uparrow.$$

$$xf'(x) - nf(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^n}\uparrow.$$

若 n 为偶数，x 需要 >0.

第 6 讲：求导逆运算构造函数

题型一、求导逆运算构造函数

1. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,其导函数为 $f'(x)$,且 $x<0$ 时,

$F(x)=xf(x)$

$f(x)+xf'(x)<0$ 若 $a=(3^{0.3})\cdot f(3^{0.3})$, $b=(\log_{\pi}3)\cdot f(\log_{\pi}3)$, $c=(\log_{3}\frac{1}{9})\cdot f(\log_{3}\frac{1}{9})$

则 a,b,c 的大小关系正确的是

$A.\ \ a>b>c$ $B.\ \ c>b>a$ $C.\ \ c>a>b$ $D.\ \ a>c>b$

A

2.(2015 全国新课标 12) 设 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的导函数， $f(-1)=0$ ，当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$,则 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围?

$F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 奇 奇 偶

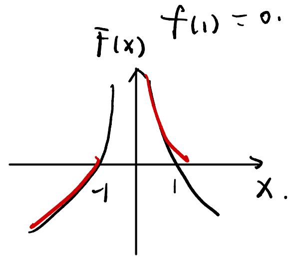
$F(1)=0$.

$f(x)=F(x)x$.

$x>0$.

$A.\ \ (-\infty,-1)\cup(0,1)$ $B.\ \ (-1,0)\cup(1,+\infty)$

$C.\ \ (-\infty,-1)\cup(-1,0)$ $D.\ \ (0,1)\cup(1,+\infty)$



B.

3.已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数,其导函数为 $f'(x)$ 满足 $\frac{f(x)}{f'(x)}+x<1$ ，则下列结论正确的是

$f'(x)<0$.

$f(x)=\frac{F(x)}{x-1}$

$x>1.\ f(x)>0.$

$x<0\ \ f(x)>0.$

$A.\ \ $ 对于任意 $x\in R$, $f(x)<0$ $B.\ \ $ 对于任意 $x\in R$, $f(x)>0$

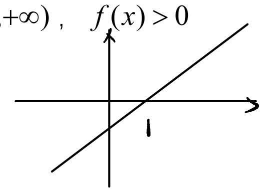
$C.\ \ $ 当且仅当 $x\in(-\infty,1)$ ， $f(x)<0$ $D.\ \ $ 当且仅当 $x\in(1,+\infty)$ ， $f(x)>0$

$\frac{f(x)}{f'(x)}+(x-1)<0$

$f(x)+f'(x)(x-1)>0$

$F(x)=(x-1)f(x).$ ↑

$F(1)=0$



4.已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,其导函数为 $f'(x)$,且 $x<0$ 时,

$2f(x)+xf'(x)<0$ 恒成立,则 $f(1),2021f(\sqrt{2021}),2022f(\sqrt{2022})$ 的大小关系为

$A.\ \ 2022f(\sqrt{2022})<2021f(\sqrt{2021})<f(1)$

$B.\quad 2022f(\sqrt{2022})<f(1)<2021f(\sqrt{2021})$

$C.\quad f(1)<2022f(\sqrt{2022})<2021f(\sqrt{2021})$

$D.\quad f(1)<2021f(\sqrt{2021})<2022f(\sqrt{2022})$

5.定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)>0$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，

且 $2f(x)<xf'(x)<3f(x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 $\dfrac{f(2)}{f(3)}$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27},\frac{4}{9}\right)$

$xf'(x)-2f(x)>0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}\uparrow \Rightarrow \frac{f(2)}{4}<\frac{f(3)}{9}$. $\quad xf'(x)-3f(x)<0$.

$\therefore \frac{f(2)}{f(3)}<\frac{4}{9}$. $\quad \frac{f(x)}{x^3}\downarrow \quad \frac{f(2)}{8}>\frac{f(3)}{27}$.

$\frac{f(2)}{f(3)}>\frac{8}{27}$

A 6.(2009 天津)设函数 $f(x)$ 在 R 上的导函数为 $f'(x)$,且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$,下面的不等式在 R 上恒成立的是

$A.\quad f(x)>0 \qquad B.\quad f(x)<0 \qquad C.\quad f(x)>x \qquad D.\quad f(x)<x$

$x=0$，$f(0)>0$. $\quad x<0$. $x^2f'(x)+2xf(x)<x^3$

$x>0$，$x^2f'(x)+2xf(x)>x^3>0$ $\quad [x^2f(x)]'<x^3<0$. $\Rightarrow F(x)=x^2f(x)\downarrow$

$\Rightarrow [x^2f(x)]'>x^3>0 \Rightarrow F(x)=x^2f(x)\uparrow$

7.(2011 辽宁)定义在 R 上的函数 $f(x)$,满足 $f(-1)=2$,且对 $\forall x\in R$, $f'(x)>2$,则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 B.

$A.\quad (-1,1) \qquad B.\quad (-1,+\infty) \qquad C.\quad (-\infty,-1) \qquad D.\quad (-\infty,+\infty)$

$f'(x)-2>0$. $\quad F(-1)=4$.

$F(x)=f(x)-2x\uparrow \quad F(x)>4=F(-1)$.

$x>-1$

△ 8.（2013 卓越联盟）设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导函数 $f'(x)$,对任意 $x\in R$ 有 $f(-x)+f(x)=x^2$,且在 $(0,+\infty)$ 上, $f'(x)>x$.若 $f(2-a)-f(a)\ge 2-2a$,则实数 a 的取值范围是

$A.\quad [1,+\infty) \qquad B.\quad (-\infty,1] \qquad C.\quad (-\infty,2] \qquad D.\quad [2,+\infty)$

$f'(x)-x>0$. $\quad \therefore -F(-x)=F(x)$ 奇函数.

$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2\uparrow \quad x\in(0,+\infty)$ $\quad F(0)=f(0)=0$. $\therefore$ 在 R上 $\uparrow$

$F(-x)=f(-x)-\frac{1}{2}x^2$ $\quad f(2-a)-\frac{1}{2}(2-a)^2-f(a)+\frac{1}{2}a^2$

$F(x)+F(-x)=f(-x)+f(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2=0$. $\quad F(2-a)-F(a)\geqslant 2-2a-\frac{1}{2}(2-a)^2+\frac{1}{2}a^2=0$

$F(2-a)\geqslant F(a) \quad 2-a\geqslant a \quad \therefore a\le 1$.

9.（2015 福建）若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论一定错误的是 C .

$A.\quad f(\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$　　$B.\quad f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k-1}$　　$C.\ f(\frac{1}{k-1})<\frac{1}{k-1}$　　$D.\quad f(\frac{1}{k-1})>\frac{k}{k-1}$

$f'(x)-k>0.$

$F(x)=f(x)-kx$ ↑

$F(0)=-1$

$0<\frac{1}{k}<1$

$-1<f(\frac{1}{k})-1<F(1)$

$=F(\frac{1}{k})$　　$f(\frac{1}{k})>0.$

CD: $\frac{1}{k-1}>0.$

$F(\frac{1}{k-1})>F(0)$

$f(\frac{1}{k-1})-\frac{k}{k-1}>-1$

$\therefore f(\frac{1}{k-1})>\frac{1}{k-1}$

D 10.设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$x\in R$ 时，有 $f'(x)+f(x)>0$，则 $x_1<x_2$ 时，结论正确的是

$[e^xf(x)]'=e^x[f'(x)+f(x)]>0.$

$[\frac{f(x)}{e^x}]'=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}.$

$A.\quad e^{x_2}f(x_1)>e^{x_1}f(x_2)$　　$B.\quad e^{x_2}f(x_1)<e^{x_1}f(x_2)$

$C.\quad e^{x_1}f(x_1)>e^{x_2}f(x_2)$　　$D.\ e^{x_1}f(x_1)<e^{x_2}f(x_2)$

$F(x)=e^xf(x)$ ↑

$e^{x_1}f(x_1)<e^{x_2}f(x_2)$

同乘 e^x

A 11.定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)>1$, $f(0)=4$,则 $e^xf(x)>e^x+3$ 的解集为

$A.\quad (0,+\infty)$　　$B.\quad (-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　　$C.\quad (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　$D.\quad (3\ +\infty)$

$e^xf'(x)+e^xf(x)-e^x>0.$

$[e^xf(x)-e^x]'>0.$

$F(x)=e^xf(x)-e^x$ ↑

$F(x)>3$

$F(0)=3.$

12.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f'(x)<2f(x)$，则

$A.\quad f(2)>e^2f(1)$　　$B.\quad e^2f(0)>f(1)$

$C.\quad 9f(\ln 2)>4f(\ln 3)$　　$D.\quad e^2f(\ln 2)<4f(1)$

13.已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)$ 满足：$(x-1)\cdot[f'(x)-f(x)]>0$，$f(2-x)=f(x)e^{2-2x}$,则下列判断一定正确的是 C .

$\frac{f(1)}{e^1}<\frac{f(0)}{e^0}$

$A.\quad f(1)<f(0)$　　$B.\quad f(2)>ef(0)$　　$C.\quad f(3)>e^3f(0)$　　$D.\ f(4)<e^4f(0)$

$\frac{f(0)}{e^0}<\frac{f(3)}{e^3}$

$x>1$ 时 $\Rightarrow f'(x)-f(x)>0\Rightarrow\frac{f(x)}{e^x}$ ↑

$x<1.\Rightarrow f'(x)-f(x)<0\Rightarrow\frac{f(x)}{e^x}$ ↓.

$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$　　$\frac{f(2-x)}{e^{2-x}}=\frac{f(x)}{e^x}$

$F(2-x)=F(x)$　　$x=1$

B

14. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，若 $f'(x)\cdot x\ln x > f(x)$，则

A. $f(2)<f(e)\ln 2$，$2f(e)>f(e^2)$ B. $f(2)<f(e)\ln 2$，$2f(e)<f(e^2)$

~~C.~~ $f(2)>f(e)\ln 2$，$2f(e)<f(e^2)$ D. $f(2)>f(e)\ln 2$，$2f(e)>f(e^2)$

$f'(x)\cdot x\ln x - f(x) > 0.$

$f'(x)\ln x - \frac{1}{x}f(x) > 0.$

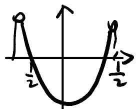
$\frac{f(x)}{\ln x}$ ↑

15.定义在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{1}{2})=0$，当 $x>0$ 都有 $(\frac{1}{x}-x)f'(x)\cdot\ln(1-x^2)>2f(x)$ 恒成立，则 $f(x)<0$ 的解集是 $(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$

$(1-x^2)f'(x)\ln(1-x^2)>2xf(x)$

$f'(x)\ln(1-x^2)-\frac{2x}{1-x^2}f(x)>0.$ → $F(x)>0.$

$F(x)=f(x)\underbrace{\ln(1-x^2)}_{负.}$ ↑



16.（难）已知 $f(x)$ 在 R 上可导函数，且满足 $(x+2)f(x)+xf'(x)>0$，则

A. $f(x)>0$ ~~B.~~ $f(x)<0$ C. $f(x)$ 为减函数 D. $f(x)$ 为增函数

$x=0.$ $2f(0)>0$，$f(0)>0.$

$x>0$ $(x^2+2x)f(x)+x^2f'(x)>0.$

D

17.定义在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $f(x)$，$f'(x)$ 是它的导函数,且恒有 $f(x)<f'(x)\cdot\tan x$ 成立,则

A. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$ B. $f(1)<2f(\frac{\pi}{6})\sin 1$

C. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})>f(\frac{\pi}{4})$ D. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$

$f'(x)\cdot\sin x > f(x)\cos x$

$f'(x)\sin x - f(x)\cos x > 0.$

$F(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$ ↑

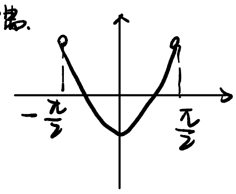
D

18.已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$ 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)\tan x-\frac{f(x)}{\cos^2 x}>0$ 且 $f(\frac{\pi}{4})=0$，则使不等式 $f(x)<\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})\tan x$ 成立的 x 的取值范围是

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$(\tan x)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$

$F(x)=\frac{f(x)}{\tan x}>0.$ 偶.



$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\frac{f(x)}{\tan x}<\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\tan\frac{\pi}{6}}$

$F(x)<F(\frac{\pi}{6}).$

$0<x<\frac{\pi}{6}.$

② $(-\frac{\pi}{2},0)$ $F(x)=\frac{f(x)}{\tan x}>F(\frac{\pi}{6}).$

$A.\ (-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6})\cup(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　$B.\ (-\frac{\pi}{6},0)\cup(0,\frac{\pi}{6})$

$C.\ (-\frac{\pi}{6},0)\cup(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　$D.\ (-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6})\cup(0,\frac{\pi}{6})$

19.(2013 辽宁)设函数 $f(x)$ 满足 $x^2 f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$, $f(2)=\frac{e^2}{8}$,则 $x>0$ 时, $f(x)$ 有

$A.$ 有极大值,无极小值　　$B.$ 有极小值,无极大值

$C.$ 既有极大值又有极小值　　$D.$ 既无极大值也无极小值

20.设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数, $f(0)=1$,且 $3f(x)=f'(x)-3$,则 $4f(x)>f'(x)$ 的解集是

$A.\ \left(\frac{\ln 4}{3},+\infty\right)$　　$B.\ \left(\frac{\ln 2}{3},+\infty\right)$　　$C.\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　$D.\ \left(\frac{\sqrt{e}}{3},+\infty\right)$